УДК 519.833.2

Е. Н. КИШАНКОВА, студентка НТУ «ХПИ»

ПЛАНИРОВАНИЕ ПРОИЗВОДСТВА ПРОДУКЦИИ В АКТИВНОЙ СИСТЕМЕ

Робота присвячена проблемі вірогідності інформаційних потоків у дворівневій активній системі віялового типу. У рамках ТАС вирішується задача планування виробництва продукції. Як моделі підприємств використовується виробнича функція Кобба-Дугласа. На основі аналізу отриманих результатів розроблені рекомендації з ефективного керування компанією.

Работа посвящена проблеме достоверности информационных потоков в двухуровневой активной системе веерного типа. В рамках ТАС решена задача планирования производства продукции. В качестве моделей предприятий используется производственная функция Кобба-Дугласа. На основе анализа полученных результатов разработаны рекомендации по эффективному управлению компанией.

The work is devoted to problem of reliability of information flows in fan-type active two- tier systems. The problem of planning of output of products is solved using active systems theory. The Kobb-Duglas production function is used as a model of daughter enterprises. On basis of analysis of obtained results the recommendations about effective company management is proposed.

Введение. Рассматривается организационная экономическая система, состоящая из центра и дочерних предприятий. Центр управляет предприятиями с помощью разработанных законов управления, а предприятия сообщают центру оценки эффективности своей деятельности. Как правило, каждый элемент системы стремится оптимизировать сообщаемую информацию, вследствие чего происходит преднамеренное её искажение.

Обычно на практике центру приходится устанавливать фиксированную внутрифирменную цену. Это обусловлено тем, что трансфертная цена формируется на основе внешней цены продукта, которая напрямую зависит от цен фирм-конкурентов на такой же товар, уровня потребительского спроса и т. д., т. е. от внешних факторов. Поэтому в данной работе задача планирования производства продукции решается при условии, что центр руководствуется принципом жесткой централизации, внутрифирменная цена – фиксирована.

Анализ работ по ТАС показывает, что серьезные трудности с управлением возникают в случае минимально возможного состава активной системы, т. е. когда она состоит из центра и 2-ух дочерних предприятий. Эти трудности связаны с большими возможностями манипулирования информацией предприятиями. Рассмотрим именно этот случай.

В качестве адекватных моделей дочерних предприятий с высоким уровнем агрегирования целесообразно использовать степенную производственную функцию Кобба-Дугласа.

$$y_i = f(k_i, l_i) = A_i * k_i^{\alpha} * l_i^{\beta}, \tag{1}$$

где Ai, α, β – постоянные величины, которые определяются эмпирическими данными, собранными при изучении конкретной производственной системы.

A_i – правомерно трактовать как показатель эффективности производства продукции i-го предприятия, поскольку.

$$A_i = \frac{y_i}{k_i^{\alpha} * l_i^{\beta}}. \tag{2}$$

k_i, – затраты капитала и труда i-го предприятия;

y_i – объем конечного продукта, полученного в результате производства на i-ом предприятии;

α, β – коэффициенты эластичности объема выпуска (Y) по соответствующим факторам производства.

Существуют и более адекватные степенные производственные функции с учетом влияния НТП, фактора человеческого капитала, фактора информации и др., но учет всех составляющих производства ведет к чрезмерной сложности анализа и интерпретации результатов эффективного управления.

Постановка задачи. Цель дочерних предприятий - увеличить свою прибыль. Центр стремится распределить запланированный объем выпуска продукции между двумя дочерними предприятиями таким образом, чтобы минимизировать суммарные затраты. В нашем случае это затраты на труд, т.к. затраты капитала являются прозрачной заранее известной величиной для центра.

Строим экономико-математическую модель поведения активных элементов системы.

Выразим целевую функцию дочернего предприятия таким образом:

$$D_i(s) = A_i k_i^{\alpha} l_i(s)^{\beta} - l_i(s) \xrightarrow[s_i]{} \max,\ i \in N,\ N = [1;2], \tag{3}$$

где D_i - прибыль i-го дочернего предприятия;

s - оценки эффективности производства продукции;

l_i - затраты на труд для i-го предприятия;

k_i - капитальные вложения для i-го предприятия.

В целях упрощения выкладок принимаем, что для обоих предприятий показатели α и β будут одинаковыми.

Управлениями центра будут являться y_i - части распределяемого им плана производства продукции ($Y = \sum_{i=1}^{n=2} y_i$)и целевая ситуация центра выглядит таким образом:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n=2} l_i \xrightarrow[s_i]{} \min \\ \sum_{i=1}^{n} y_i = Y \end{cases}. \quad (4)$$

Исходя из этого, центр формирует закон управления, который бы гарантированно привел систему в целевое состояние.

Чтобы выработать закон управления, запишем целевую функцию центра более подробно с учётом того, что истинных значений A_i центр не знает, а знает лишь оценки эффективности производства продукции s_i:

$$L = l_1 + l_2 = \sqrt[\beta]{\frac{y_1}{s_1 * k_1^{\alpha}}} + \sqrt[\beta]{\frac{Y - y_1}{s_2 * k_2^{\alpha}}} \xrightarrow[A_i]{} \min \cdot \quad (5)$$

Функция затрат имеет экстремум в минимальной точке и достаточно найти первую частную производную функции по s_i, приравнять полученное выражение *0* и таким образом определить зависимость планов производства от сообщаемых оценок при минимальных затратах труда. Преобразовав полученное выражение, получим закон управления центра:

$$y_1 = \frac{Y\left(s_2 k_2^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}}{\left(s_1 k_1^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} + \left(s_2 k_2^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}} \cdot \quad (6)$$

В свою очередь: $y_2 = Y - y_1$.

Используя зависимость $l_i(y_i)$ из функции Кобба-Дугласа, запишем целевые функции дочерних предприятий в более удобном для решения виде:

$$\begin{cases} D_1(s) = A_1 k_1^{\alpha} \left(\sqrt[\beta]{\frac{y_1}{s_1 * k_1^{\alpha}}}\right)^{\beta} - \sqrt[\beta]{\frac{y_1}{s_1 * k_1^{\alpha}}} \xrightarrow[s_i]{} \max \\ D_2(s) = A_2 k_2^{\alpha} \left(\sqrt[\beta]{\frac{Y - y_1}{s_2 * k_2^{\alpha}}}\right)^{\beta} - \sqrt[\beta]{\frac{Y - y_1}{s_2 * k_2^{\alpha}}} \xrightarrow[s_i]{} \max \end{cases}. \quad (7)$$

Используя закон управления центра (формула 6), получим систему целевых функций, зависящих от сообщаемых оценок эффективности производства.

Для урегулирования конфликтных ситуаций между оппонентами активной системы воспользуемся математическим аппаратом ТАС и определим:

- стандартное гарантированное решение Нэша;
- точку максимальной суммы выигрышей ($D_1 + D_2 \rightarrow max$);
- точку Эджворта ($D_1 * D_2 \rightarrow max$).

Так как в данном случае анализируется игра двух предприятий, то определение точки Нэша производится таким образом:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial D_1}{\partial s_1} = 0 \\ \dfrac{\partial D_2}{\partial s_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(s_1, s_2) = 0 \\ f_2(s_1, s_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow точка\_Нэша(s_1^*, s_2^*) \cdot \qquad (8)$$

Продифференцировав целевые функции предприятий, и приравняв их 0 по примеру формулы 8, получим систему уравнений, по решению которой получим точку Нэша. Точка Нэша: $s_1=0$, $s_2=0$.

В связи с тем, что точка Нэша находится в 0, с позиции центра становится целесообразным отследить ретроспективные параметры производственной деятельности предприятий и спрогнозировать их на плановый период. На этой основе центру придется установить приемлемые ограничения для предприятий на оценки коэффициентов эффективности. Очевидно, что в таком случае предприятия будут выходить на заданные ограничения и тогда задача решается элементарно - по формулам 1-6 вычисляются все показатели работы системы. Поэтому основное внимание теперь уделяется нахождению остальных стандартных решений.

Чтобы наглядно показать, каким образом происходит нахождение интересующих точек, рассчитаем пример на основе тестовых данных. Пусть центр знает, что фактор капитала, который представляет собой расходы на обслуживание оборудования, его ремонт, покупку нового, плату за аренду оборудования либо помещений и т.д., он потратит 5 (тыс. ден. единиц), при этом расходы будут распределены между дочерними предприятиями следующим образом: $k_1=2$, $k_2=3$.

Коэффициенты эффективности производства продукции по результатам прошлых отчетных периодов в исследуемой модели принимают значения: $A_1=200$, $A_2=230$; коэффициенты эластичности выпуска по факторам труда и капитала: $\alpha=0,75$ $\beta=0,25$.

Ограничения на сообщаемые оценки коэффициентов эффективности производства продукции: $s_1=185$, $s_2=225$.

Центр ориентируется на то, что спрос равен предложению и запланированный объём производства продукции $Y=10,869$ (тыс. ден. единиц). План производства распределяется между двумя предприятиями, поэтому можно записать:

$$A_1 k_1^{\alpha} l_1^{\beta} + A_2 k_2^{\alpha} l_2^{\beta} = Y \cdot \qquad (9)$$

А это значит, что $l_2=l_2(l_1)$, и целевые функции предприятия можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} D_1 = A_1 k_1^{\alpha} l_1^{\beta} - l_1 \\ D_2 = A_2 k_2^{\alpha} l_2(l_1)^{\beta} - l_2(l_1) \end{cases} . \qquad (10)$$

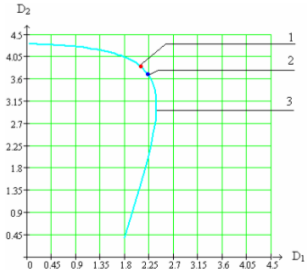
Построим пространство игры в выигрышах предприятий и определим игровые точки на множестве Парето. Эти операции произведем с помощью средств MathCad (см. рис.1).

```
D11 := | for i ∈ 1.. 50
       |   l1 ← 0 + 0.1·i
       |   A1 ← 2
       |   A2 ← 2.3
       |   k1 ← 2
       |   k2 ← 3
       |   α ← 0.75
       |   β ← 0.25
       |   Y ← 10.869
       |   l2 ← ((Y − A1·k1^α·l1^β) / (A2·k2^α))^(1/β)
       |                 ⎡ l1                                     ⎤
       |                 ⎢ l2                                     ⎥
       |   D11^⟨i⟩ ←     ⎢ A1·k1^α·l1^β − l1                      ⎥
       |                 ⎢ A2·k2^α·l2^β − l2                      ⎥
       |                 ⎢ (A1·k1^α·l1^β − l1)·(A2·k2^α·l2^β − l2) ⎥
       |                 ⎣ (A1·k1^α·l1^β − l1) + (A2·k2^α·l2^β − l2) ⎦
       | D11
```

Рис. 1 Программный блок MathCad для определения пространства игры

В результате получим набор точек, из которых можно выделить: точку Эджворта: $max(D_1*D_2)=8{,}210$ (тыс. ден. единиц); точку максимальной суммы выигрышей: $max(D_1+D_2)=5{,}940$(тыс. ден. единиц);а также значения l_1, l_2, D_1, D_2 в этих точках. Учитывая ограничение на сообщаемую информацию $s_1=185$, по формулам 6-7 находим значения y_1,y_2,s_2.

С помощью графических средств MathCad построим пространство игры в выигрышах предприятий и изобразим интересующие нас решения (рис. 2).



1 – точка максимальной суммы выигрышей; 2 – точка Эджворта
3 – пространство игры

Рис. 2. Решение игры в пространстве критериев

Данные результатов решения игры представлены в таблице:

Данные результатов решения игры

Переменные	Оптимальное решение	Точка Нэша	Точка Эджворта $max(D_1*D_2)=8,212$	Точка max суммы $max(D_1+D_2)=5,940$
s_1	200	185	185	185
s_2	230	220	222,8	216,9
D_1	2,116	2,013	2,222	2,096
D_2	3,694	3,694	3,694	3,844
D	5,81	5,707	5,916	5,940
l_1	1,756	1,974	1,5	1,8
l_2	3,173	3,843	3,452	3,129
L	4,349	5,817	4,952	4,929
y_1	3,872	3,688	3,698	3,896
y_2	6,997	7,181	7,171	6,973
Y	10,869	10,869	10,869	10,869

В зависимости от ориентации предприятий появляется возможность оценить эффективность типа поведения в точке Нэша, в точке Эджворта, в точке максимальной суммы выигрышей и сравнить полученные результаты с оптимальным решением игры, где $s_1=A_1$ $s_2=A_2$.

Выводы. По итогам решения численного примера получаем, что точка Нэша, дающая гарантированный выигрыш – не эффективна. Это говорит о том, что предприятиям целесообразно стремиться к определенному взаимодействию с целью получения большего выигрыша. Решение в точке максимальной суммы выигрышей предпочтительнее, чем в точке Эджворта, т.к. прибыль в нём достигает наибольшего значения, а затраты – наименьшего. Как показывает практика, в точке максимальной суммы выигрышей между предприятиями возникает жесткая борьба за перераспределение прибылей, что влечёт за собой соответствующие убытки. Поэтому центру предпочтительней ориентироваться на точку Эджворта.

Заключение. Большинство производственных функций в ТАС построены по принципу упрощения действительности ради простоты модели и работы с ней. В результате, параметры такой модели являются лишенными общепринятого экономического смысла. С целью повышения адекватности моделей предприятий, используется ПФ Кобба-Дугласа, поэтому аналитическое решение задачи - трудоёмкое. За счёт того, что центр ставит задачу выпускать запланированное количество продукции, аналитическая сложность задачи снижена, а пространство игры принимает форму кривой, на которой нахождение интересующих решений представляется возможным.

Список литературы: ***1***. *Щепкин А. В*. Внутрифирменное управление (модели и методы). М.:ИПУРАН, 2001. 80 с. ***2***. *Бурков В.Н., Новиков Д. А*. Теория активных систем и задачи организационного управления. М, 2001. 365 с. ***3***. *Бурков В. Н*. Основы математической теории активных систем. М.: Наука, 1977. 289 с.

Поступила в редколлегию 22.05.07